成蹊大学理工学研究報告
J. Fac. Sci.Tech., Seikei Univ.
Vol.54 No.2 (2017)pp.17-20

組合せ最適化問題に対するロバスト最適化

呉　偉[*1]

Robust Optimization for Combinatorial Optimization Problems

Wei WU[*1]

ABSTRACT : Many combinatorial optimization problems arising in real-world applications do not have accurate estimates of the problem parameters when the optimization decision is taken. Stochastic programming and robust optimization are two common approaches for the solution of optimization problems under uncertainty. In this paper, we describe the common definitions of uncertainty set, as well as 3 criteria, min-max, min-max regret and min-max relative regret, to evaluate a solution. Furthermore, we present general lemmas for obtaining worst case scenarios based on a given solution.

Keywords : robust optimization, combinatorial optimization, min-max regret, robust level

(Received October 30, 2017)

1．はじめに

技術革新に伴い，大量の情報資源を有効に利用する最適化手法の必要性が高まってきた．現実社会の重要な意思決定の多くが組合せ最適化問題として定式化できる．このような問題を解決する方法としてさまざまな最適化手法が提案されてきている．厳密な最適解を求める手法である分枝限定法や動的計画法，そして，最適性の保証はないが良質の解を出来るだけ効率良く求めようとする発見的解法などである．分枝限定法の近年の発展は目覚ましく，実用的で汎用性の高い解法として多くの数理計画ソフトウェアのエンジンとして利用されている．発見的解法の多様なアイディアをうまく組み合わせることによって高い性能を得ようとするパラダイムであるメタ戦略の有用性は広く認知されるようになってきた．

しかし，最適化手法のほとんどは，入力データが既知という前提のもとにアルゴリズムが設計されている．一方で，多くの現実問題における入力データには曖昧さや不確定要素が内在している．たとえば，生産計画を立てるために最適化問題を解く段階では，需要が確定しておらず，需要予測に基づいて計画を行わなければならない．したがって，「計画段階で別の判断をしていればもっと利益が上がったのに」と後悔することのないような計画，つまり，入力データの変動に大きく影響されないような解が望まれる．不確定要素を深く考慮せず，たとえば予測値をそのまま入力データとして既存の最適化手法を適用して得られた解が，実用における良い解になるとは限らない．もう一つの例として，渋滞予測に基づいて平均所要時間最短のルートを選んでも天気や渋滞の要因で最も早く着くとは限らない．

ロバスト最適化（robust optimization）とは，このような問題の入力に不確定さ或は曖昧さが内在している場合にも，信頼できる結果を返すようなモデリング技法及びその解法を指す．

組合せ最適化問題のロバスト最適化に関する研究は，1997 年にKouvelisらが発足した [1]．2006 年，Bertimasらは入力データの不確定さ分布がない場合にロバストレベル Γ を考慮した設定を提案した [2]．2009 年に，Aissiらは基本のmin-maxモデルより実用性の高いmin-max regretモデルに関する研究をサーベイした [3]．古典的な組合せ最適化問題として，最短路問題や，巡回セールスマン問題や，一般化割当問題などのロバスト最適化に対して，厳密と近似アルゴリズムが提案されており [4),5),6]，経済，建築，都市計画，化学など多数の分野で応用事例もあげられた [7]．

*1：情報科学科助教(wuwei@st.seikei.ac.jp)

2. 不確定さの設定

本論文では目的関数の係数に不確定さが内在するケースを中心として議論する．決定要素の集合を$N=\{1,2,\dots,n\}$，要素$i(\in N)$における目的関数の係数をc_i，整数制約ありの決定変数をx_i，また，実行可能領域をXとする場合に，線形目的関数を持つ 0-1 組合せ最適化問題は

$$\text{min (or max)} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad x \in X \subseteq \{0,1\}^n \tag{2}$$

のように定義できる．式 (1) と (2) の形は，最短路問題 (shortest path problem)，割当問題 (assignment problem)，最小全域木問題 (minimum spanning tree problem) などのような多項式アルゴリズムの存在する問題や，ナップサック問題 (knapsack problem)，一般化割当問題 (generalized assignment problem)，集合被覆問題 (set covering problem) などのようなNP困難な問題を含め，多くの種類の組合せ最適化問題を表せる．

ロバスト最適化の一つの特徴として，不確定な入力に関する特定な確率分布がない場合でも，信頼できる解を求めることができる．目的関数(1)でのc の取りうる値 (シナリオ) の集合をUとし，Uは離散である場合と連続である場合があり，それぞれ離散シナリオと連続シナリオと呼ぶ．連続シナリオの中に単純区間とロバストレベルを考慮したΓロバストなどの凸多面体が多くの研究に使用された．(そのほかにも楕円型の集合などの設定もある[8]．) 単純区間の設定では，各要素i において，標準値c_i^*と変動幅$\delta_i(\geq 0)$が与えられ，係数c_i が $[c_i^*-\delta_i, c_i^*+\delta_i]$ 区間での値が取り得る，すなわち，

$$U=\{(c_1,c_2,\dots,c_n) \mid \forall i \in N, c_i = c_i^* + \delta_i\gamma_i, \gamma_i \in [-1,1]\}. \tag{3}$$

現実に近い不確定さをモデルに取り組むために，近年Bertsimasらより，ロバストレベル（Γ上限）を考慮できる連続シナリオが提案された[2]．不確定要素の予測値から外れる個数（必ずしも整数とは限らない）の最大レベルを表すパラメータ Γを設定することで，より一般化した不確定集合が設定できる：

$$U=\{(c_1,c_2,\dots,c_n) \mid \forall i \in N, c_i = c_i^* + \delta_i\gamma_i, \gamma_i \in [-1,1] \text{ and } \textstyle\sum_{i\in N}|\gamma_i| \leq \Gamma\}. \tag{4}$$

特殊ケースとして，$\Gamma=0$ の場合は変動なしの古典的な組合せ最適化問題となり；$\Gamma=n$ の場合は，単純区間の設定(3)となる．Γ レベルの設定により，単純区間の一般化を実現できるが，その設定でのロバスト最適化問題がさらに難しくなる．

3. ロバストな解の評価基準

不確定集合Uの下でロバスト最適化の解評価基準として，min-max 基準，min-max regret 基準と min-max relative regret基準が知られている．問題(1)が最小化問題の場合，min-max基準は

$$\min_{x\in X}\max_{c\in U} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{5}$$

のようになる．また，係数cがc'であるときの最適値を$z(c')$，すなわち，$z(c)=\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ とすると，解xがシナリオcの下での後悔を表す値が$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - z(c)$となり，min-max regret基準は

$$\min_{x\in X}\max_{c\in U} \quad \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - z(c)\right) \tag{6}$$

のように表せる． min-max relative regret基準では各解が最適値と割合で後悔を表している：

$$\min_{x\in X}\max_{c\in U} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - z(c)}{z(c)}. \tag{7}$$

Min-max基準はmin-max regret基準とmin-max relative regret基準より，保守的となるため，再決定する機会のない場合（線路の設計，原発事故の予防）に応用される．また，決定者のあらかじめ設定した目標を達成するにも，有効であろう．

一方，min-max regret基準とmin-max relative regret基準は解の「後悔の度合い」を評価するため，投資問題などではmin-max基準より，良い解が得られる傾向がある．

4. 最悪シナリオ

連続シナリオの場合には，入力データの各パラメータの変動の幅に上下限を設けたとしても，その範囲内に入るパラメータの値の組合せは無限にある．入力データの変動によって起こりうる最悪のシナリオを評価するには，そのようなシナリオを無限の可能性の中から見つける必要がある．3 節で紹介した三つの基準(5)-(7)ではそのような「最悪シナリオ」は，元の問題の解ごとに異なる（解に依存する)．例えば，min-max基準(5)では，元の問題に対するひとつの解 $x(\in X)$ が与えられたとき，その解xに対してコストが最大となるシナリオを最悪シナリオと指す，すなわち，x に対する最悪シナリオ$c(x)$は$c(x)=$

$\mathrm{argmax}_{c\in U}\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$である．

単純区間不確定集合U でmin-max基準(5)を用いる場合に，Yamanらにより最悪シナリオは$c(x)$は

$$c_i(x) = \begin{cases} c_i^* + \delta_i, & x_i = 1 \\ c_i^* - \delta_i, & x_i = 0 \end{cases} \tag{8}$$

のように決まる[9]．また，ロバストレベルを考慮したΓロバスト設定(4)ではZhangらにより最悪シナリオが

$$c_i(x) = \begin{cases} c_i^* + \delta_i, & j = j_1, j_2, \dots, j_\Gamma \\ c_i^*, & j = j_{\Gamma+1}, \dots, j_n \end{cases} \tag{9}$$

のように定義できる[10]．ここで，順列$(j_1, j_2, \dots, j_n)$ は$\delta_j x_j$での非減少 (non-decreasing)順である．また，xの実行可能領域を$X \subseteq \mathbb{Z}^n$に拡張した場合にも拡張できる：

$$c_i(x) = \begin{cases} c_i^* + \delta_i, & j = j_1, j_2, \dots, j_\Gamma \text{ and } x_j \geq 0 \\ c_i^* - \delta_i, & j = j_1, j_2, \dots, j_\Gamma \text{ and } x_j < 0 \\ c_i^*, & j = j_{\Gamma+1}, \dots, j_n, \end{cases} \tag{10}$$

順列$(j_1, j_2, \dots, j_n)$ は$\delta_j |x_j|$での非減少順である．されに，(9)の最悪シナリオ特性は，$\Gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ にも対応できる：

$$c_i(x) = \begin{cases} c_i^* + \delta_i, & j = j_1, j_2, \dots, j_{\lfloor\Gamma\rfloor} \\ c_i^* + (\Gamma - \lfloor\Gamma\rfloor)\delta_i, & j = j_{\lfloor\Gamma\rfloor+1} \\ c_i^*, & j = j_{\lfloor\Gamma\rfloor+2}, \dots, j_n. \end{cases} \tag{11}$$

最悪シナリオレンマ(8)-(11)の下で，多くの厳密解法及び近似解法が提案された[4),5),6),10),11)]．

5．むすび

本論文では，組合せ最適化問題に対するロバスト最適化を紹介した．不確定さの設定として，構造の簡単な単純区間設定がよく利用されているが，各パラメータ間の関係性を持たない欠点がある．その関係性を表現するために，より一般化したロバストレベルを考慮したΓロバスト設定が提案された．また，解の評価基準として，min-max，min-max regretとmin-max relative regretの三つが代表的である．しかし，いずれの基準でも問題は解とシナリオの二段階の最適化問題となり，基本的な最適化技法はそのまま，使用できない．この大きな壁を乗り越えるためには，解とシナリオの関係性を明らかにする必要がる．最悪シナリオレンマは解とその解に対応する最悪シナリオの関係性を示している．その性質により，多くの厳密解法及び近似解法が提案されており，これからはロバスト最適化の構造の下で効率の良い汎用解法が構築できると期待する．

参考文献

1) P. Kouvelis, G. Yu, Robust Discrete Optimization and its Application, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
2) D. Bertsimas, A. Thiele, "A robust optimization approach to inventory theory," Operations Research, Vol.54, No.1, pp.150-168, 2006.
3) H. Aissi, C. Bazgan, D. Vanderpooten, "Min-max and min-max regret versions of combinatorial optimization problems: A survey," European Journal of Operational Research, Vol.197, No.2, pp.427-438, 2009.
4) O.E. Karaşan, M.Ç. Pınar, and H. Yaman, "The robust shortest path problem with interval data," Technical report, Bilkent University, Ankara, Turkey, 2001.
5) R. Montemanni, J. Barta, M. Mastrolilli, and L. Gambardella, "The robust traveling salesman problem with interval data, Transportation Science," Vol.41, No.3, pp.366-381, 2011.
6) W. Wu, M. Iori, S. Martello, M. Yagiura, "Algorithms for the min-max regret generalized assignment problem with interval data," IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), Selangor, Malaysia, December, pp.734-738, 2014.
7) D. Bertsimas, D. Brown, C. Caramanis, "Theory and applications of robust optimization," Vol.53, No.3, pp.464-501, 2011.
8) A. Ben-Tal, L. Ghaoui, A. Nemiroovski, Robust Optimization, Princeton University Press, 2009.
9) H. Yaman, O.E. Karaşan, M.Ç. Pınar, "The robust spanning tree problem with interval data," Vol.29, No.1, pp.31-40, 2001.
10) J. Zhang, W. Wu, M. Yagiura, "Worst case scenario lemma for Γ-Robust combinatorial optimization problems under max-min criterion," IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), Singapore, December, 2017. (to appear)
11) W.Wu, M.Iori, S.Martello, M.Yagiura, "An iterated dual substitution approach for the min-max regret multidimensional knapsack problem," IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), Bali, Indonesia, December, pp.726-730, 2016.